Université Ibn Khaldoun Tiaret
Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique 2023-2024

3ème License S5 P.E

Corrigé Examen de Maths App. à l'énergétique

Exercice 1 :

x_i	$f[x_i]$	a_n		
0	0	$\Leftarrow \boldsymbol{a_0}$		
$\frac{\pi}{2}$	1	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0]-f[x_1]}{(x_0-x_1)} = \frac{2}{\pi}$	$\Leftarrow \boldsymbol{a_1}$	
π	0	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1]-f[x_2]}{(x_1-x_2)} = -\frac{2}{\pi}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1]-f[x_1, x_2]}{(x_0-x_2)} = -\frac{4}{\pi^2}$	$\Leftarrow \boldsymbol{a_2}$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

Avec l'ajout d'un point : $i = 3,\ x_3 = \frac{3\pi}{2}, f[x_3] = -1$, alors :

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_2]-f[x_3]}{(x_2-x_3)} = -\frac{2}{\pi},\quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{(x_1-x_3)} = 0$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{(x_0 - x_3)} = \frac{8}{3\pi^3}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),\quad P_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2)$$

Exercice 2 :

La condition $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\ \ \forall i$ est bien vérifiée.

A partir du système d'équations on obtient :

$$x_1 = \frac{1 - 3x_2 + 5x_3}{12},\qquad x_2 = \frac{28 - x_1 - 3x_3}{5},\qquad x_3 = \frac{76 - 3x_1 - 7x_2}{13},$$

Suite des solutions :

Itération	x_1	$\Delta x_1\%$	x_2	$\Delta x_2\%$	x_3	$\Delta x_3\%$
1	0.5	100	4.9	100	3.0923	67.602
2	0.14679	240.61	3.7153	31.88	3.8118	18.874
3	0.74275	80.236	3.1644	17.408	3.9708	4.0064
4	0.94675	21.546	3.0281	4.4996	3.9971	0.65772
5	0.99177	4.5391	3.0034	0.82499	4.0001	0.07438
6	0.99919	0.743	3.0001	0.108	4.0001	0.00101

La 6éme itération montre clairement que la solution converge vers la solution : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

a) <u>$h = 0{,}2$</u> :

$f(t, y) = y(t) - \frac{2t}{y(t)}$ ***et*** $t \in [0,\ 0.2] \Longrightarrow$ une seule valeur approchée : u_1 tel que : $u_1 = u_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ *et* $u_0 = 1$

$k_1 = f(t_0, u_0) = f(0,1) = 1$ *et* $k_2 = f(t_1, u_0 + k_1 h) = f(0.2, 1.2) = 0.8666$, $u_1 = u_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.18666$

b) <u>$h = 0{,}1$</u> :

Deux valeurs approchées : u_1, u_2 tel que : $u_1 = u_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$

$$k_1 = f(t_0, u_0) = f(0,1) = 1 \quad et \quad k_2 = f(t_1, u_0 + k_1 h) = f(0.1, 1.1) = 0.91818$$

$$u_1 = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 0.91818) = 1.095909$$

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$k_1 = f(t_1, u_1) = f(0.1, 1.095909) = 0.91341,\qquad k_2 = f(t_2, u_1 + k_1 h) = f(0.2, 1.187248) = 0.85033$

$$u_2 = 1.095909 + \frac{0.1}{2}(0.91341 + 0.85033) = 1.18409$$

c) Comparaison avec le résultat exacte : $y(t) = \sqrt{2t + 1}$: $y(0.2) = 1.18321$

Pour <u>$h = 0{,}2$</u> : $l'erreur\ est\ \ \varepsilon = 0.00345$, Pour <u>$h = 0{,}1$</u> : $l'erreur\ est\ \ \varepsilon = 0.00088$ résultat plus précis.